

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 01.12.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

Решения

Довывод

1. Кубический дом $1000 \times 1000 \times 1000$ разбит на комнаты $1 \times 1 \times 1$; в некоторых комнатах живёт по одному человеку, а остальные пусты. Назовём общительностью человека количество занятых комнат, имеющих с его комнатой общую грань. Оказалось, что у чётного числа жителей общительность равна 4, а у каждого из остальных она равна 2. Докажите, что общее количество жителей чётно.

М. Югов, модификация

Решение. Покрасим комнаты в белый и чёрный цвета шахматным образом, а каждого человека окрасим в цвет его комнаты. Назовём людей с общительностью 4 и 2 *экстравертами* и *интровертами* соответственно. Пусть есть a чёрных экстравертов, b чёрных интровертов, c белых экстравертов и d белых интровертов. Рассмотрим двудольный граф, где вершины каждой доли — это чёрные и белые жители соответственно, а ребром будем соединять двух жителей, живущих в соседних комнатах. Тогда количество рёбер между долями равно $4a + 2b = 4c + 2d$, то есть $2a + b = 2c + d$. Значит, числа b и d имеют одинаковую четность, и $b + d \div 2$. По условию $a + c \div 2$. Тогда и $a + b + c + d \div 2$, то есть общее количество жителей чётно.

2. Пусть ABC — треугольник, в котором $\angle ACB = 90^\circ$ и $\angle A > \angle B$. Касательная в точке C к описанной окружности треугольника ABC , пересекает прямую AB в точке D . Точка E — середина отрезка CD , а точка F лежит на прямой EB так, что $AF \parallel CD$. Докажите, что прямые AB и CF перпендикулярны.

Австралия, 2020

Решение. Пусть K — точка пересечения прямых AF и BC . Тогда $AF = FK$, потому что $DE = EC$ и $CD \parallel KA$. При этом $\angle ACK = 90^\circ$, откуда получаем, что $FK = FC = FA$. Тогда $\angle ACF = \angle FAC = \angle DCA = \angle ABC = 90^\circ - \angle CAB$, то есть $AB \perp CF$.

3. Дано простое число $p > 3$. Для каждого натурального $n < p$ обозначим через x_n наименьшее натуральное число, для которого nx_n даёт при делении на p остаток 1. Какой остаток даёт при делении на p число

$$\sum_{n=1}^{p-1} n \left[\frac{nx_n}{p} \right] ?$$

Олимпиада Юго-Восточного Китая, 2021

Ответ: $\frac{p-1}{2}$.

Решение. Сначала перепишем нашу сумму в виде

$$\sum_{n=1}^{p-1} n \left[\frac{nx_n}{p} \right] = \sum_{n=1}^{p-1} n \frac{nx_n - 1}{p} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{n=1}^{p-1} n^2 x_n - \frac{(p-1) \cdot p}{2p} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{n=1}^{p-1} n^2 x_n - \frac{p-1}{2}.$$

Заметим, что для каждого натурального n выполнено $x_{p-n} = p - x_n$. Тогда перепишем оставшуюся сумму по модулю p^2 следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p-1} n^2 x_n &= \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} (n^2 x_n + (p-n)^2 (p-x_n)) \equiv \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} (n^2 x_n + n^2 p + 2pnx_n - n^2 x_n) \equiv \\ &\equiv p \cdot \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} n^2 + 2p \cdot \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} 1 \equiv \frac{(p-1) \cdot (p+1) \cdot p^2}{4 \cdot 6} + p(p-1) \equiv p(p-1) \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

В последнем переходе выше мы воспользовались тем, что $p > 3$. Тогда $\frac{1}{p} \cdot \sum_{n=1}^{p-1} n^2 x_n \equiv p-1 \pmod{p}$.

Соответственно, исходная сумма даёт остаток $p-1 - \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2}$ при делении на p .

4. Анна и Боб играют в игру с колодой из 2025 карт, пронумерованных числами $1, 2, \dots, 2025$. Изначально колода как-то перетасована, оба игрока знают порядок карт в ней. Анна и Боб ходят по очереди, начинает Анна. За ход игрок сначала смотрит на верхнюю карту. Если её номер k , он каким-то образом перетасовывает верхние k карт (показывая другому игроку, как именно он их перетасовал). Если после этого карта k по-прежнему лежит наверху, игрок, сделавший ход, проиграл, иначе ход переходит к другому игроку. Назовём перетасованную колоду интересной, если в игре, начинающейся с этой колоды, Боб может добиться того, чтобы Анна проиграла. Каких интересных колод больше — тех, в которых вторая сверху карта имеет номер 28, или тех, в которых она имеет номер 29?

МЕМО 2022, модифицировано

Ответ: вторых больше.

Решение. Пусть на верхнем месте лежит карта t . Назовём позицию *плохой*, если t — минимальное из чисел, написанных на верхних t картах, и *хорошей* в противном случае.

Нетрудно заметить, что из плохой позиции любой ход или немедленно ведёт к проигрышу, или ведёт в хорошую. Рассмотрим следующую стратегию ходов из хороших позиций в плохие: пусть из плохой позиции с верхней картой t соперник получил позицию с верхней картой $s > t$. Положим на верхнее место карту с наименьшим номером среди доступных нам s карт, а остальные карты выложим сверху вниз в порядке убывания номеров. При такой стратегии мы опять попадаем в плохую позицию, но нам нужно узнать о ней немного больше.

Именно, докажем, что за два хода (соперника и нашего) или номер верхней карты уменьшился, или же он остался равным t , но наименьший номер карты, лежащей на местах со 2-го по t -е, увеличился. Действительно, пусть после хода соперника все номера верхних s карт не меньше t ; тогда среди них максимум $s - t + 1$ номеров, не больших s , то есть хотя бы $s - (s - t + 1) = t - 1$ карт, чьи номера больше s . Значит, только такие карты и займут места со 2-го по t -е после нашего хода, в то время как до хода соперника на этих местах лежала карта с номером s , откуда и следует требуемое.

Из доказанного следует, что при такой стратегии после нашего хода число на верхней карте рано или поздно будет уменьшаться, но бесконечно долго оно уменьшаться не может. Значит, соперник проиграет. То есть мы доказали, что хорошие позиции — это выигрышные позиции (то есть, если перед началом игры позиция хорошая, но начинающий игрок имеет выигрышную стратегию), а плохие — проигрышные (выигрышная стратегия есть у ходящего вторым). Тогда в любой интересной колоде с числом t на верхней карте, на следующих $t - 1$ картах числа больше t .

Разобьём все возможные колоды с числом 28 или 29 на второй карте на пары: каждой колоде сопоставим получающуюся из неё заменой карт с числами 28 и 29 местами. Нетрудно видеть, что из интересной колоды с картой 28 на втором месте обязательно получится интересная, а вот из интересной колоды с картой 28 на первом месте и числом 29 на втором (такая есть!) получится неинтересная, ибо в ней второе число будет меньше первого. Следовательно, интересных колод с числом 29 на второй карте больше.

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 01.12.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

Решения

Вывод

5. Совершенным паросочетанием в графе называется набор рёбер такой, что из каждой вершины выходит ровно одно ребро этого набора. В двудольном графе с долями S и T есть хотя бы одно совершенное паросочетание. Докажите, что можно расставить на рёбрах графа попарно различные действительные числа так, что

- если в каждой вершине доли S выбрать по ребру с наименьшим числом, то получится совершенное паросочетание;
- если в каждой вершине доли T выбрать по ребру с наибольшим числом, то получится совершенное паросочетание.

Олимпиада им. Миклоша Швейцера, 2024

Решение. Докажем утверждение задачи индукцией по количеству вершин. База для двух вершин очевидна. Докажем переход. Зафиксируем паросочетание M .

Предположим, что в графе есть чередующийся цикл $C = v_1v_2 \dots v_{2t}$, то есть цикл, в котором чередуются рёбра из M и не из M . Удалим вершины этого цикла. В оставшемся графе по предположению индукции можно расставить числа на рёбрах так, чтобы условие задачи выполнилось. Вернём вершины удалённого цикла. На любом ребре v_iu , где $v_i \in C$, $u \notin C$ поставим число так, чтобы оно не нарушало выбор ребра для u . А на рёбрах цикла C поставим на рёбрах $v_{2i}v_{2i+1}$ самые большие числа в графе, а на рёбрах $v_{2i+1}v_{2i+2}$ самые маленькие числа в графе. Тогда при выборе рёбер с наименьшим числом из вершин S мы выберем рёбра $v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{2t}v_1$, а выбор остальных рёбер останется прежним, как в индукционном предположении. Аналогично для выбора рёбер с наибольшим числом из вершин T . В этом случае переход доказан.

Предположим, что чередующихся циклов нет. Пусть совершенное паросочетание M содержит рёбра u_iv_i , $u_i \in S$, $v_i \in T$. Докажем, что в графе есть висячая вершина. Рассмотрим ребро $u_1v_1 \in M$. Если v_1 не висячая, то есть ребро $v_1u_i \notin M$ (пусть это ребро v_1u_2) и ребро $u_2v_2 \in M$. Если v_2 не висячая, то есть ребро $v_2u_j \notin M$ (пусть это ребро v_2u_3) и $u_3v_3 \in M$, и так далее. В ходе рассуждений мы строим чередующийся путь $u_1v_1 u_2v_2 u_3v_3 \dots$. Так как чередующихся циклов нет, и граф двудольный, то рано или поздно мы придём в висячую вершину.

Пусть без ограничения общности u_1 висячая вершина. Удалим из графа вершины u_1 и v_1 , а для оставшихся применим предположение индукции. Вернём вершины u_1 и v_1 . Расставим числа на всех рёбрах u_iv_1 , $i \neq 1$ так, чтобы они не нарушали выбор рёбер для u_i . А на ребре u_1v_1 поставим самое большое число в графе. Нетрудно убедиться, что такая расстановка чисел подходит. Переход доказан.

6. Отрезки BE и CF — биссектрисы углов B и C остроугольного неравнобедренного треугольника ABC , пересекающиеся в точке I . Точка N — середина меньшей дуги BC описанной окружности Ω треугольника ABC . Точка X на дуге BAC окружности Ω такова, что $NX \perp EF$. Пусть точки P и Q являются серединами дуг XB и XC , содержащих вершины C и B соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника IEF касается Ω тогда и только тогда, когда прямые BP , CQ и EF пересекаются в одной точке или параллельны.

Я. Щербатов

Решение. Заметим, что точка P лежит на дуге NCX окружности Ω , а точка Q лежит на дуге NBX окружности Ω . Имеем

$$\angle NXP + \angle XPQ = \angle BXP - \angle BXN + \angle XCQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCX - \angle BXN + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle CBX = 90^\circ.$$

Тогда $PQ \perp NX \perp EF$ то есть $PQ \parallel EF$. При этом

$$\begin{aligned}\angle QNP &= 180^\circ - \angle QXP = 180^\circ + \angle BAC - \angle QXC - \angle BXP = \\ &= 180^\circ + \angle BAC - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle XBC\right) - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle XCB\right) = \angle BAC + \frac{1}{2}(\angle XBC + \angle XCB) = \\ &= \angle BAC + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle EIF.\end{aligned}$$

Тогда в силу $PQ \parallel EF$ прямые QF и PE пересекаются в центре K гомотетии, переводящей Q в F и P в E соответственно, а в силу равенства $\angle QNP = \angle FIE$ эта же гомотетия переводит Ω в описанную окружность треугольника EIF . Причём если $QF \parallel PE$, то K — это бесконечно удалённая точка направления QF , а описанная Ω переходит в описанную окружность треугольника EIF при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{QF} \neq \overrightarrow{0}$, а значит они точно не касаются внутренним образом, а внешним они касаться не могут, потому что точка I лежит внутри Ω . Тогда касание Ω и описанной окружности треугольника EIF равносильно тому, что точка K лежит на Ω . Применим теорему Паскаля для точек $BACQKP$. Тогда $K \in \Omega$ равносильно тому, что $BA \cap QK = F$, $AC \cap KP = E$ и $CQ \cap BP$ лежат на одной прямой, что в свою очередь равносильно тому, что прямые EF , CQ и BP пересекаются в одной точке или параллельны, что и требовалось доказать.

7. Определим многочлены $f_n(x)$ формулами

$$f_1(x) = x^2 + x, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) \cdot (f_n(x) + 2^{2^{n-1}-1}).$$

Докажите, что при любом $n \geq 3$ многочлен

$$f_n(x) + 2^{2^{n-1}-1}$$

раскладывается в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами одинаковой степени.

R. Stanley, D. Grinberg, M. Alexeev

Решение. Обозначим $2^{2^{n-1}-1}$ через a_n , а также введём многочлен $g_n(x) = f_n(x) + a_n$. Для многочленов g_n условие переписывается в виде

$$g_{n+1} = f_{n+1} + a_{n+1} = f_n(f_n + a_n) + 2a_n^2 = (g_n - a_n)g_n + 2a_n^2 = g_n^2 - a_n g_n + 2a_n^2 = h(g_n, a_n),$$

где $h(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$. Тогда

$$g_{n+2} = h(g_{n+1}, a_{n+1}) = h(h(g_n, a_n), a_{n+1}) = h(h(g_n, a_n), 2a_n^2).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}h(h(x, y), 2y^2) &= (x^2 - xy + 2y^2)^2 - 2(x^2 - xy + 2y^2)y^2 + 8y^4 = \\ &= (x^2 - xy + 2y^2)^2 + 2(x^2 - xy + 2y^2)y^2 + y^4 - 4(x^2 - xy + 2y^2)y^2 + 7y^4 = \\ &= (x^2 - xy + 3y^2)^2 - (4x^2y^2 - 4xy^3 + y^4) = (x^2 - xy + 3y^2)^2 - (2xy - y^2)^2 = \\ &= (x^2 - 3xy + 4y^2)(x^2 + xy + 2y^2).\end{aligned}$$

Осталось подставить $x = g_n$ и $y = a_n$.

Замечание. Функция $f_n(x)$ возникает во время изучения количества циклов в перестановках некоторых подгрупп группы перестановок.